

MARKENS TEMPERATUR OCH VÄRMEHUSHÅLLNING

SIGVARD ANDERSSON

STENCILTRYCK NR 22

**INSTITUTIONEN FÖR LANTBRUKETS HYDROTEKNIK
UPPSALA 1961**

Institutionen för lantbrukets hydroteknik delger bl. a. i sin tidskrift *Grundförbättring* resultat från institutionens olika verksamhetsgrenar. Allt material blir emellertid inte föremål för tryckning. Undersökningsresultat av preliminär natur och annat material som av olika anledningar ej ges ut i tryck delges ofta i stencilerad form. Institutionen har ansett det lämpligt att redovisa dylikt material i form av en i fri följd utarbetad serie, benämnd stenciltryck. Serien finns endast tillgänglig på institutionen och kan i mån av tillgång erhållas därifrån.

Adress: Institutionen för lantbrukets hydroteknik, *Uppsala 7*

Stenciltryck

Nr	År	Författare och titel
1—12		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson. Redogörelse för resultaten av täckdikningsförsöken åren 1951—1962.
13—15		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av täckdikningsförsök och bevattningsförsök åren 1963—1965.
16	1940	Gunnar Hallgren. Dalgångarna Fyrisån-Östersjön; några hydrotekniska studier.
17	1942	Gunnar Hallgren. Om sambandet mellan grundvattenståndet och vattennivån i en recipient.
18	1943	Gunnar Hallgren. Om sambandet mellan nederbörd och skördeavkastning.
19	1952	Sigvard Andersson. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Elementär hydromekanik.
20	1952	Sigvard Andersson. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Tabeller och kommentarer.
21	1960	Sigvard Andersson. Kapillaritet.
22	1961	Sigvard Andersson. Markens temperatur och värmehushållning.

Förord.

Detta är ett arbete om temperaturförhållandena i marken och om dess värmehushållning. Det är framför allt ett försök att ge en jämförelsevis enkel framställning av områdets teori. Någon fullständigare behandling av ämnet eftersträvas ej. De olika avsnitten ha numrerats i löpande och tämligen fri följd. Något försök att över- och underordna rubrikerna ur synpunkten av det i dem antydda innehållet, dess omfattning och betydelse har ej blivit gjort.

Arbetet beräknas att fullständigast genom successivt tillfogade avsnitt, allteftersom tid gives för deras utarbetande och de egna experimentella undersökningarna utvecklas. På detta sätt beräknas olika aspekter på problemet att bli genomarbetade och därmed en viss fullständighet uppnås.

Uppsala i september 1961

Sigvard Andersson

Innehållsförteckning.

	Sida
Förord	I
1. Till härledningen av en partiell differential- ekvation för värmets strömning i marken.	1
2. Om en partikulär lösning till den partiella diffe- rentialekvationen (1.2)	3
3. Närmare analys av ekvationen (2.2)	5
4. Numerisk genomräkning av ett teoretiskt exempel på en årsvåg	9
5. Ekvationen (3.1) framställd med λ som parameter	17
6. Numerisk genomräkning av ett teoretiskt exempel på en dygnsvåg	19

1.

Till härledningen av en partiell differentialekvation för värmets strömning i marken.

Helt allmänt bör temperaturfördelningen i en mark vara bestämd av det symboliskt tecknade uttrycket

$$\vartheta = f(z, t, I) \quad (1.1)$$

där ϑ är temperaturen på djupet z vid tiden t i marken med parametern I . I tänkes här utgöra en sammanfattande beteckning för alla de egenskaper hos marken, som bestämmer temperaturfördelningen. För en given mark gäller alltså (i bästa fall) $I = I_1 = \text{konst.}$

Betrakta nu figur 1.1, vilken tänkes ange ett ur marken utskuret semiinfinit rät prisma med rektangulär basyta a .

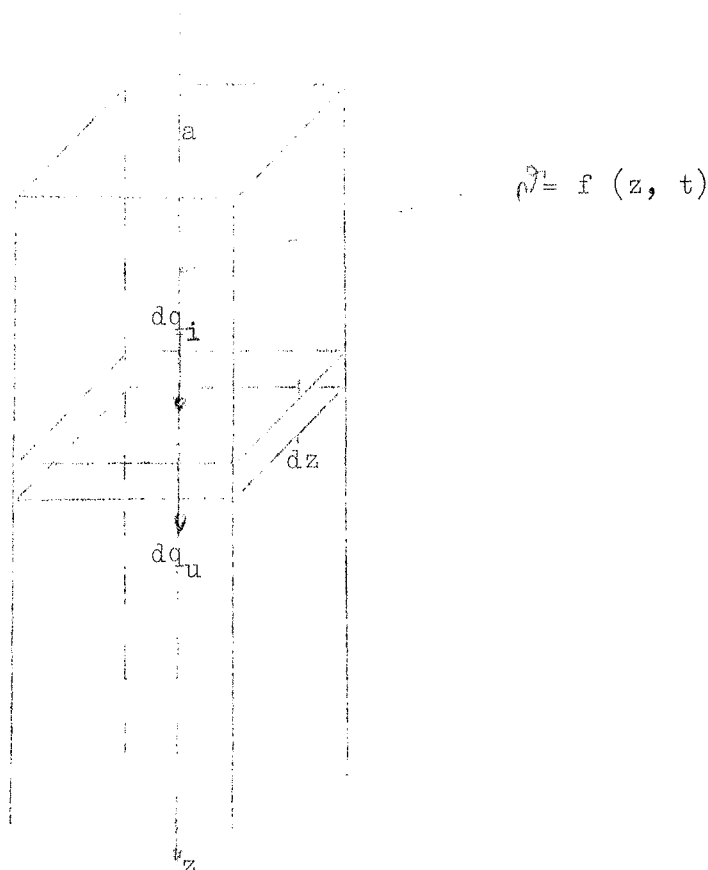


Fig. 1.1.

Värmet tänkes här strömma vertikalt nedåt. Betrakta skiktet dz på djupet z . Genom skiktets övre begränsningsyta strömmar värmemängden dq_i in under tiden dt . Under samma tid strömmar mängden dq_u ut.

Temperaturgradienten i skiktets övre begränsningsyta kan skrivas $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$. Enligt fysiken måste då gälla för dq_i

$$dq_i = k a \left(- \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dt \quad (1.a)$$

Temperaturgradienten i skiktets nedre begränsningsyta är (obs! temp. för djupet z är θ !)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz \right) = \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz \quad (1.b)$$

För dq_u gäller då (se ovan!)

$$dq_u = k a \left(- \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz \right) dt \quad (1.c)$$

Den värmemängd dq_m , som magasineras i skiktet dz , kan då tydligen tecknas

$$dq_m = dq_i - dq_u = k a \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz dt \quad (1.d)$$

Om markens specifika värme per viktsenhet är c_g och volymvikt γ , så blir det till volymenheten hänfödda spec. värmets $c_v = \gamma c_g$. Tydligen gäller då

$$dq_m = c_v a dz d\theta \quad (1.e)$$

Ekvationerna (1.d) och (1.e) ger

$$c_v a dz d\theta = k a \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz dt \quad (1.f)$$

eller efter förenkling

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (1.2)$$

där

$$D = \frac{k}{c_v} = \frac{k}{c_g \gamma} \quad (1.3)$$

benämnes temperaturledningsförmåga (eng. diffusivity).

Den partiella differentialekvationen (1.2) ovan är den av Fourier 1822 publicerade ekvationen för värmeledningen i en stav (Theorie analytique de la chaleur).

Om en partikulär lösning till den partiella
differentialekvationen (1.2).

Markytan utsättes i allmänhet för mycket oregelbundna temperaturväxlingar. Dessa kan icke exakt beskrivas med enkla matematiska uttryck. Med hjälp av Fourierserier kan emellertid varje givet temperaturförlopp - även det mest oregelbundna - framställas som en summa av sinus- och cosinustermerna. Tillpassningens noggrannhet bestäms härvid av huru många termer, som medtages.

För varje given lokal beskriver temperaturen i stort en karaktäristisk årscykel (= årsvåg) och för varje dygn en dygns-
cykel (= dygns-
våg).

I det enklaste fallet kan man antaga och även visa (se t.ex. Dobrowsky, J., 1944!), att dessa temperatursvängningar kan beskrivas med en enda cosinus- eller sinusterm. Det vill säga

$$\hat{\theta} = \theta_{m,0} + \Delta\theta_{a,0} \cos \frac{2\pi}{T} t \quad (2.1)$$

där $\hat{\theta}$ är temperaturen vid en godtycklig tidpunkt t , $\Delta\theta_{a,0}$ temperaturamplituden eller maximala avvikelser från medeltemperaturen $\theta_{m,0}$ och T perioden t.ex. året mätt i dagar eller dygnet mätt i timmar.

Experimentella mätningar visar, att olika långa temperaturstigningar och -fall tränger ned i jorden med en med djupet växande tidsfördröjning = fördröjning och neddämpning = minskning av amplituden. Se t.ex. Ångström, A. (1958) och Richards, S.J. (1952).

Mot bakgrunden av dessa fakta är det naturligt att pröva lösningen

$$\hat{\theta} = \theta_{m,0} + \Delta\theta_{a,0} e^{-z\sqrt{\frac{\pi}{DT}}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - z\sqrt{\frac{\pi}{DT}} \right) \quad (2.2)$$

där $\hat{\theta}$, $\theta_{m,0}$, $\Delta\theta_{a,0}$, T och t har tidigare angiven betydelse, z betyder djupet och D är temperaturledningsförmågan. Det är nämligen tydligt, att denna ekvation uppfyller de tidigare angivna kraven. För $z = 0$ erhålles ekv. (2.1). För växande z minskas vinkeln vid givet t , vilket ger en tidsförskjutning, fördröjning eller fasförskjutning, och uttrycket på amplituden $\Delta\theta_{a,z}$

$$\Delta\theta_{a,z} = \Delta\theta_{a,0} e^{-z\sqrt{\frac{\pi}{DT}}} \quad (2.3)$$

minskar likaså.

Att ekvationen (2.2) också verkligen är en lösning till differentialekv. (1.2), kan vi visa genom derivering. Vi skriver med lätt insedda förkortningar och förenklingar.

$$\psi = a e^{-b z} \cos (c t - b z) = a e^{-b z} \cos \varphi \quad (2.a)$$

Derivering med avs. på t ger

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a e^{-b z} c (-1) \sin \varphi = -a c e^{-b z} \sin \varphi \quad (2.b)$$

Första derivatan med avs. på z blir

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -ab e^{-b z} \cos \varphi + ab e^{-b z} \sin \varphi \quad (2.c)$$

och andra derivatan blir

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = ab^2 e^{-b z} \cos \varphi - ab^2 e^{-b z} \sin \varphi - ab^2 e^{-b z} \sin \varphi - ab^2 e^{-b z} \cos \varphi \quad (2.d)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -2 ab^2 e^{-b z} \sin \varphi = 2 b^2 (-a e^{-b z} \sin \varphi) \quad (2.e)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -a c e^{-b z} \sin \varphi = c (-a e^{-b z} \sin \varphi) \quad (2.f)$$

dvs.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{c}{2b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.g)$$

men enl. det föregående är

$$\frac{c}{2b^2} = \frac{2\pi}{T} \frac{D\tau}{2\pi} = D \quad (2.h)$$

och således

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Men detta är ekv. (1.2) och beviset är genomfört.

3.

Närmare analys av ekvationen (2.2).

Om vi med c betecknar det s.k. geotermiska måttet, så kan ekvationen (2.2) något fullständigare skrivas

$$\vartheta = \vartheta_{m,o} + c z + \Delta \vartheta_{a,o} e^{-z \sqrt{\frac{\pi}{DT}}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - z \sqrt{\frac{\pi}{DT}} \right) \quad (3.1)$$

där termen $c z$ nu uttrycker den med djupet stigande medeltemperaturen

$\vartheta_{m,z}$ eller

$$\vartheta_{m,z} = \vartheta_{m,o} + c z \quad (3.2)$$

Det geotermiska måttet brukar ofta anges i grader temperaturstigning per 100 m ökat djup. I fast berg anges medeltalet 3° per 100 m. Enligt G. Beskow (1935, s. 184!) kan i lösa kapillärmättade jordlager c då sättas till $6^\circ \text{C}/100 \text{ m}$ eller $c = 6 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}/\text{cm}$ (se även längre fram!).

Bestämning av våglängden. Om vi grafiskt avbilda ekv. (2.2) eller (3.1) för t.ex. $z = z_1$ erhålles en cosinuskurva (jfr med fig. 4.1!), dvs. temperaturen beskriver för varje djup en enkel harmonisk svängningsrörelse. Vid varje given tidpunkt $t = t_1$ bildar temperaturen en med djupet dämpad vågkurva, dvs. temperaturförändringarna i markytan utbreder sig mot djupet som en fortskridande vågrörelse.

Våglängden definieras såom avståndet mellan två konsekutiva i fas likbelägna delar av vågen. Om vi i överensstämmelse med fysiken betecknar våglängden med λ , så måste då vid en godtycklig tidpunkt $t = t_1$ gälla

$$\left(\frac{2\pi}{T} t_1 - z_2 \sqrt{\frac{\pi}{DT}} \right) - \left(\frac{2\pi}{T} t_1 - z_1 \sqrt{\frac{\pi}{DT}} \right) = -2\pi \quad (3.a)$$

där z_1 och z_2 är två djup på avståndet λ och motsvarande en vinkelskillnad av 2π . Således efter viss förenkling av ekv. (3.a)

$$(z_2 - z_1) \sqrt{\frac{\pi}{DT}} = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{DT}} = 2\pi \quad (3.b)$$

eller

$$\lambda = 2 \sqrt{\pi DT} \quad (3.3)$$

Våglängden är proportionell mot roten ur perioden.

Numeriskt ex. Om vi med $\lambda_{\text{år}}$ beteckna våglängden för en årsvåg och med λ_{dygn} våglängden för en dygnsvåg, så erhålles

$$\frac{\lambda_{\text{år}}}{\lambda_{\text{dygn}}} = \sqrt{\frac{T_{\text{år}}}{T_{\text{dygn}}}} = \sqrt{\frac{365}{1}} = 19.1 \quad (3.0)$$

eller

$$\lambda_{\text{år}} = 19.1 \lambda_{\text{dygn}} \quad (3.4)$$

Bestämning av vågens hastighet. Tiden för en fullständig svängning dvs. perioden har vi betecknat med T . Under denna tid rör sig vågen eller bättre breder vågen (temperaturförändringen!) ut sig längden λ . Vågrörelsens hastighet v blir då

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad (3.d)$$

dvs. i detta fall

$$v = 2 \sqrt{\frac{\pi D}{T}} \quad (3.5)$$

Vågens nedträngningshastighet är omvänt proportionell mot roten ur perioden.

Numeriskt ex. Med lätt insedda beteckningar erhålles

$$\frac{v_{\text{dygn}}}{v_{\text{år}}} = \sqrt{\frac{T_{\text{år}}}{T_{\text{dygn}}}} = \sqrt{\frac{365}{1}} = 19.1 \quad (3.e)$$

eller

$$v_{\text{dygn}} = 19.1 v_{\text{år}} \quad (3.6)$$

Anm. Om v och λ införes i uttrycket för vinkeln uti ekv. (3.1), erhålles de viktiga likheterna

$$\left(\frac{2\pi}{T} t - z \sqrt{\frac{\pi}{DT}} \right) = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{z}{v} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} (v t - z) = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \quad (3.7)$$

Bevisa dessa likheter!

Enligt ekv. (2.3) är amplituden $\Delta \rho_{a,z}^{(0)}$ på djupet z bestämd av uttrycket

$$\Delta \rho_{a,z}^{(0)} = \Delta \rho_{a,0}^{(0)} e^{-z \sqrt{\frac{\pi}{DT}}}$$

Förhållandet mellan amplituderna på djupen z_1 och z_2 blir alltså

$$\frac{\Delta \rho_{a,z_1}^{(0)}}{\Delta \rho_{a,z_2}^{(0)}} = \frac{e^{-z_1 \sqrt{\frac{\pi}{DT}}}}{e^{-z_2 \sqrt{\frac{\pi}{DT}}}} = e^{(z_2 - z_1) \sqrt{\frac{\pi}{DT}}} \quad (3.8)$$

Av denna ekvation framgår, att om djupet \underline{z} tillåtes växa i aritmetisk serie dvs. $\underline{z}_{1+i} - \underline{z}_i = \text{konst.}$ för $i = 1, 2, 3 \dots$, så avtar amplituderna $\Delta \rho_{a, z_i}^{(i)}$ i geometrisk serie. Uttrycket

$$\sqrt{\frac{\pi}{DT}} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi T}{v}$$

kallas i vågrörelseläran dämpkonstant (rumsdämpkonst.).

Fasförskjutningen Δt kan definieras som den tid det tar för vinkeln, argumentet $(\frac{2\pi}{T} t - z\sqrt{\frac{\pi}{DT}})$, att på djupet \underline{z}_2 uppnå ett vid en tidigare tidpunkt \underline{t}_1 på djupet \underline{z}_1 ($< \underline{z}_2$) uppnått värde $\frac{2\pi}{T} t_1 - z_1 \sqrt{\frac{\pi}{DT}}$. Således skall gälla $(t_2 = t_1 + \Delta t)$

$$\frac{2\pi}{T} (t_1 + \Delta t) - z_2 \sqrt{\frac{\pi}{DT}} = \frac{2\pi}{T} t_1 - z_1 \sqrt{\frac{\pi}{DT}} \quad (a)$$

som ger

$$\Delta t = \frac{z_2 - z_1}{2} \sqrt{\frac{T}{\pi D}} \quad (3.9)$$

Det är tydligt, att denna fasförskjutning helt enkelt också är bestämd av uttrycket

$$\Delta t = \frac{z_2 - z_1}{v} \quad (3.10)$$

dvs. lika med den tid det tar för vågen att gå från djupet \underline{z}_1 till djupet \underline{z}_2 .

Vi sammanställer slutligen resultaten av vår analys i nedanstående översiktligt givna satser och formler:

Sats 3.1. Temperaturförändringarna i markytan utbreder sig mot djupet som en fortskridande vågrörelse.

Sats 3.2. Våglängden λ är härvid direkt proportionell mot roten ur svängningstiden T eller perioden. I formel

$$\lambda = 2 \sqrt{\pi DT} \quad (3.3)$$

Sats 3.3. Vågens nedträngningshastighet v är omvänt proportionell mot roten ur perioden. I formel

$$v = 2 \sqrt{\frac{\pi D}{T}} \quad (3.5)$$

Sats 3.4. Temperaturamplituden $\Delta \rho_{a, z_i}^{(i)}$ avtar i geometrisk progression, när djupet \underline{z} tillåtes växa i aritmetisk progression. I formel

$$\frac{\Delta \rho_{a, z_1}^{(i)}}{\Delta \rho_{a, z_2}^{(i)}} = e^{(z_2 - z_1) \sqrt{\frac{\pi}{DT}}} \quad (3.8)$$

Sats 3.5. Färförskjutningen Δt eller fördröjningen växer lineärt med djupet z och den är direkt proportionell mot kvadratroten ur perioden T . I formel

$$\Delta t = \frac{z}{2} \sqrt{\frac{T}{\pi D}} = \frac{z}{v} \quad (3.9) \text{ o. } (3.10)$$

(Observera att z_1 här satts = 0 och att index för z_2 strukits!)

4.

Numerisk genomräkning av ett teoretiskt
exempel på en årsvåg.

För Ultuna (Uppsala) gäller att $\vartheta_m = 5.2$, $\vartheta_{\max} = + 16.8$ och $\vartheta_{\min} = - 3.8$ allt i grader C. Av detta erhålles $2 \Delta \vartheta_{a,0} = 20.6^\circ \text{ C}$.
Överslagsvis kan vi sätta

$$\vartheta = 5.2 + 6 \cdot 10^{-4} z + 12 e^{-z \sqrt{\frac{\pi}{DT}}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - z \sqrt{\frac{T}{DT}} \right) \quad (4.1)$$

Av litteraturen framgår, att vi såsom ett lämpligt medelvärde för D kan sätta $D = 0.004 \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}}$. Vi omräknar detta till cm^2/dag . Således

$$0.004 \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}} = 0.004 \frac{3600 \cdot 24}{3600 \cdot 24} \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}} = 346 \frac{\text{cm}^2}{\text{dag}}$$

Våglängden λ blir

$$\lambda = 2 \sqrt{\pi DT} = 2 \sqrt{3.1416 \cdot 346 \cdot 365} = 1259 \text{ cm} = \underline{12.6 \text{ m}}$$

Temperaturförändringarna fortplanta sig nedåt med hastigheten v

$$v = 2 \sqrt{\frac{\pi D}{T}} = 2 \sqrt{\frac{3.1416 \cdot 346}{365}} = \frac{2 \cdot 1.772 \cdot 18.60}{19.11} = 3.45 \frac{\text{cm}}{\text{dag}}$$

$$v = 1.04 \frac{\text{m}}{\text{mån.}} \approx 1 \frac{\text{m}}{\text{mån.}}$$

Dämpkonstanten blir

$$\sqrt{\frac{\pi}{DT}} = \sqrt{\frac{3.1416}{346 \cdot 365}} = \frac{1.772}{18.60 \cdot 19.11} = 0.005 \text{ cm}^{-1}$$

Uttrycket för amplituden blir alltså

$$\Delta \vartheta_{a,z} = 12 e^{-0.005 z}$$

För $z = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$ erhålles amplituden 7.28° C .

Amplitudminskningen i procent för varje meters ökat djup blir

$$100 \cdot \frac{12 - 7.28}{12} = 39.3 \% \approx 40 \%$$

Fasförskjutningen är bestämd av uttrycken (3.9 o. 3.10)

$$\Delta t = \frac{z_2 - z_1}{2} \sqrt{\frac{T}{\pi D}} = \frac{z_2 - z_1}{v}$$

eller i detta fall

$$\Delta t = \frac{z_2 - z_1}{3.45} \text{ dagar}$$

För $z_1 = 0$ och $z_2 = 100$ cm, erhålles

$$\Delta t = \frac{100}{3.45} = 29.0 \text{ dagar}$$

Fasförskjutningen är alltså i runt tal 30 dagar för varje meters ökat djup.

En närmare analys av huru sex mätpunkter bör fördela sig vid experimentella mätningar till 6 meters djup visar (se ex. 4.1!), att mätpunkterna lämpligen fördelas enligt nedanstående översikt: $z_1 = 30$ cm, $z_2 = 70$ cm, $z_3 = 120$ cm, $z_4 = 190$ cm, $z_5 = 300$ cm och $z_6 = 600$ cm.

I tabell (4.1) anges amplituden $\Delta \rho_{a,z}$ och fasförskjutningen Δt utom för ovan angivna djup även för alla jämna halva metrar till sex meters djup.

Tabell 4.1.

z cm	0.005 z	$e^{-0.005 z}$	$\Delta \rho_{a,z}$ oc	Δt Dagar	Anmärkningar
0	0.000	1.0000	12.00	0.0	
<u>30</u>	0.150	0.8607	10.33	8.7	
50	0.250	0.7788	9.35	14.5	
<u>70</u>	0.350	0.7047	8.46	20.3	
100	0.500	0.6065	7.28	29.0	
<u>120</u>	0.600	0.5488	6.59	34.8	
150	0.750	0.4724	5.67	43.5	
<u>190</u>	0.950	0.3867	4.64	55.1	
200	1.000	0.3679	4.41	58.0	
250	1.250	0.2865	3.44	72.5	
<u>300</u>	1.500	0.2231	2.68	87.0	
350	1.750	0.1738	2.09	101.5	
400	2.000	0.1353	1.62	116.0	
450	2.250	0.1054	1.26	130.5	
500	2.500	0.0821	0.99	145.0	
550	2.750	0.0639	0.77	159.4	
<u>600</u>	3.000	0.0498	0.60	174.0	

I ekv. (4.1) är vinkeln uttryckt i radianer. För att kunna konstruera de på figurerna 4.1. - 4.3. uppritade kurvorna är det nödvändigt att erhålla ett tillräckligt antal sammanhörande t - och ρ -värden.

Om vi inför grader som vinkelmått och dessutom beakta eventuellt förekommande begynnelsevillkor, erhålles

$$\vartheta = 5.2 + 6 \cdot 10^{-4} z + 12 \cdot e^{-0.005 z} \cos \frac{360}{T} \left[(t + t_0) - \frac{z}{v} \right] \quad (4.a)$$

$$\vartheta = 5.2 + 6 \cdot 10^{-4} z + 12 \cdot e^{-0.005 z} \cos 0.986 \left[(t + t_0) - 0.290 z \right] \quad (4.b)$$

Jämför med ekv. 3.7)! Obs $T = 365$ dagar!

Enklaste sättet att konstruera kurvorna på de angivna figurerna torde vara att på ett mm-rutat papper t.ex. sätta tidsaxeln för ett år $= 360$ mm dvs. $1^\circ \approx 1$ mm. Vi upprättar därför tabell (4.2) samt uppritar "grundkurvorna" utan någon fasförskjutning dvs. rakt under varandra. Därefter överföres dessa genom överläggning på ett ljusbord, varvid kurvorna förskjutes i överensstämmelse med de beräknade och i tab. (4.2) införda fasförskjutningarna. På detta sätt erhålles kurvorna på fig. 4.1. De för konstruktionen av kurvorna på figurerna 4.2. och 4.3. nödvändiga värdena erhålles sedan genom avläsning av eller grafisk överföring från fig. 4.1.

Enligt ekvationen (2.2) är temperaturen ϑ en funktion av de två oberoende variablerna $z =$ djup och $t =$ tid. Vid grafisk framställning i planet erhålles därför tre olika kurvskaror, allteftersom den ena eller andra av de tre storheterna betraktas som parameter.

Betraktas djupet z som parameter, erhålles ett enkelt trigonometriskt samband mellan temperaturen ϑ och tiden t . Den grafiska framställningen (fig. 4.1.) ger oss en åskådlig bild av temperaturens variation med tiden på de valda djupen. De enskilda kurvorna kallas geotermier. Experimentellt erhålles sådana kurvor vid t.ex. automatisk registrering av temperaturen på olika djup.

Betraktas tiden t som parameter, erhålles ett samband av något mera komplicerad art mellan temperaturen ϑ och djupet z . Den grafiska framställningen (fig. 4.2.) ger oss en åskådlig bild av temperaturens variation med djupet vid de olika valda tidpunkterna. De enskilda kurvorna kallas tautokroner. Enligt ekvationen (2.2) är de med djupet starkt dämpade vågkurvor. Experimentellt erhålles de om temperaturen på några olika djup avläses t.ex. en viss dag och de erhållna värdena inprickas i ett temperatur-djupdiagram och punkterna sammanbindes.

Betraktas temperaturen ϑ som parameter, erhålles ett komplicerat samband mellan t och z . Den grafiska framställningen (fig. 4.3.) ger oss en åskådlig bild av djupet och varaktigheten av olika temperaturer i mar-ken. De enskilda kurvorna kallas termoisopleter.

Vinkel α	b = $\cos \alpha$	Fasförskjutning															
		Dag. 0		8.7		20.3		34.8		55.1		87.0		130.5		174.0	
		mm		8.6		20.0		34.3		54.3		85.8		128.7		171.6	
		Djup i cm															
0		30		70		120		190		300		450		600			
12 b	+5.20	10.33 b	+5.22	8.46 b	+5.24	6.59 b	+5.27	4.64 b	+5.31	2.68 b	+5.38	1.26 b	+5.47	0.60 b	+5.56		
0	1.0000	12.00	17.20	10.33	15.55	8.46	13.70	6.59	11.86	4.64	9.95	2.68	8.06	1.26	6.83	0.60	6.16
180			-6.80		-5.11		-3.22		-1.32		+0.67		+2.70		4.31		+4.96
5	0.9962	11.95	17.15	10.29	15.51	8.43	13.67	6.56	11.83	4.62	9.93	2.67	8.05	1.26	6.83	0.60	6.16
175			6.75		5.07		3.19		1.29		0.69		2.71		4.31		4.96
10	0.9848	11.82	17.02	10.17	15.39	8.33	13.57	6.49	11.76	4.57	9.88	2.64	8.02	1.24	6.81	0.59	6.15
170			6.62		4.95		3.09		1.22		0.74		2.74		4.33		4.97
15	0.9659	11.59	16.79	9.98	15.20	8.17	13.41	6.37	11.64	4.48	9.79	2.59	7.97	1.22	6.79	0.58	6.14
165			6.39		4.76		2.93		1.10		0.83		2.79		4.35		4.98
20	0.9397	11.28	16.48	9.71	14.93	7.95	13.19	6.19	11.46	4.36	9.67	2.52	7.90	1.18	6.75	0.56	6.12
160			6.08		4.49		2.71		0.92		0.95		2.86		4.39		5.00
25	0.9063	10.88	16.08	9.36	14.58	7.67	12.91	5.97	11.24	4.21	9.52	2.43	7.81	1.14	6.71	0.54	6.10
155			5.68		4.14		2.43		0.70		1.10		2.95		4.43		5.02
30	0.8660	10.39	15.59	8.95	14.17	7.33	12.57	5.71	10.98	4.02	9.33	2.32	7.70	1.09	6.66	0.52	6.08
150			5.19		3.73		2.09		0.44		1.29		3.06		4.48		5.04
35	0.8192	9.83	15.03	8.46	13.68	6.93	12.17	5.40	10.67	3.80	9.11	2.20	7.58	1.03	6.60	0.49	6.05
145			4.63		3.24		1.69		0.13		1.51		3.18		4.54		5.07
40	0.7660	9.19	14.39	7.91	13.13	6.48	11.72	5.05	10.32	3.55	8.86	2.05	7.43	0.97	6.54	0.46	6.02
140			3.99		2.69		1.24		+0.22		1.76		3.33		4.60		5.10
45	0.7071	8.49	13.69	7.30	12.52	5.98	11.22	4.66	9.93	3.28	8.59	1.90	7.28	0.89	6.46	0.42	5.98
135			3.29		2.08		0.74		0.61		2.03		3.48		4.68		5.14
50	0.6428	7.71	12.91	6.64	11.86	5.44	10.68	4.24	9.51	2.98	8.29	1.72	7.10	0.81	6.38	0.39	5.95
130			2.51		1.42		0.20		1.03		2.33		3.66		4.76		5.17
55	0.5736	6.88	12.08	5.93	11.15	4.85	10.09	3.78	9.05	2.66	7.97	1.54	6.92	0.72	6.29	0.34	5.90
125			1.68		0.71		+0.39		1.49		2.65		3.84		4.85		5.22
60	0.5000	6.00	11.20	5.17	10.39	4.23	9.47	3.30	8.57	2.32	7.63	1.34	6.72	0.63	6.20	0.30	5.86
120			0.80		+0.05		1.01		1.97		2.99		4.04		4.94		5.26
65	0.4226	5.07	10.27	4.37	9.59	3.58	8.82	2.78	8.05	1.96	7.27	1.13	6.51	0.53	6.10	0.25	5.81
115			+0.13		0.85		1.66		2.51		3.35		4.25		5.04		5.31
70	0.3420	4.10	9.30	3.53	8.75	2.89	8.13	2.25	7.52	1.59	6.90	0.92	6.30	0.43	6.00	0.21	5.77
110			1.10		1.69		2.35		3.02		3.72		4.46		5.14		5.35
75	0.2588	3.11	8.31	2.67	7.89	2.19	7.43	1.71	6.98	1.20	6.51	0.69	6.07	0.33	5.90	0.16	5.72
105			2.09		2.55		3.05		3.56		4.11		4.69		5.24		5.40
80	0.1737	2.08	7.28	1.79	6.99	1.47	6.61	1.14	6.41	0.81	6.12	0.47	5.85	0.22	5.79	0.10	5.66
100			3.12		3.43		3.77		4.13		4.50		4.91		5.35		5.46
85	0.0872	1.05	6.25	0.90	6.12	0.74	5.98	0.57	5.84	0.40	5.71	0.23	5.61	0.11	5.68	0.05	5.61
95			4.15		4.32		4.50		4.70		4.91		5.15		5.46		5.51
90	0.0000	0.00	5.20	0.00	5.22	0.00	5.24	0.00	5.27	0.00	5.31	0.00	5.38	0.00	5.57	0.00	5.56
90			5.20		5.22		5.24		5.27		5.31		5.38		5.57		5.56

Den av R. Gandahl (jfr med Grundförbättring 1957, årg. 10, nr 1!) konstruerade tjäldjupsmätaren kan sägas direkt ge oss termoisopleten för 0°C .

Ex. 4.1. För att mäta marktemperaturens växling under året skall sex termometrar placeras på olika djup. Den översta skall placeras på 30 cm djup och den nedersta (djupaste) på 600 cm djup. Bestäm den lämpligaste fördelningen av de övriga fyra termometrarna!

Lösning. Om vi i anslutning till vårt numeriska exempel antar att $\Delta\theta_{a,0}^{\text{år}}$ är 12°C , så kan vi använda tabellens 4.1 siffror för konstruktionen av nedanstående kurva. Lösningen framgår sedan av figuren!

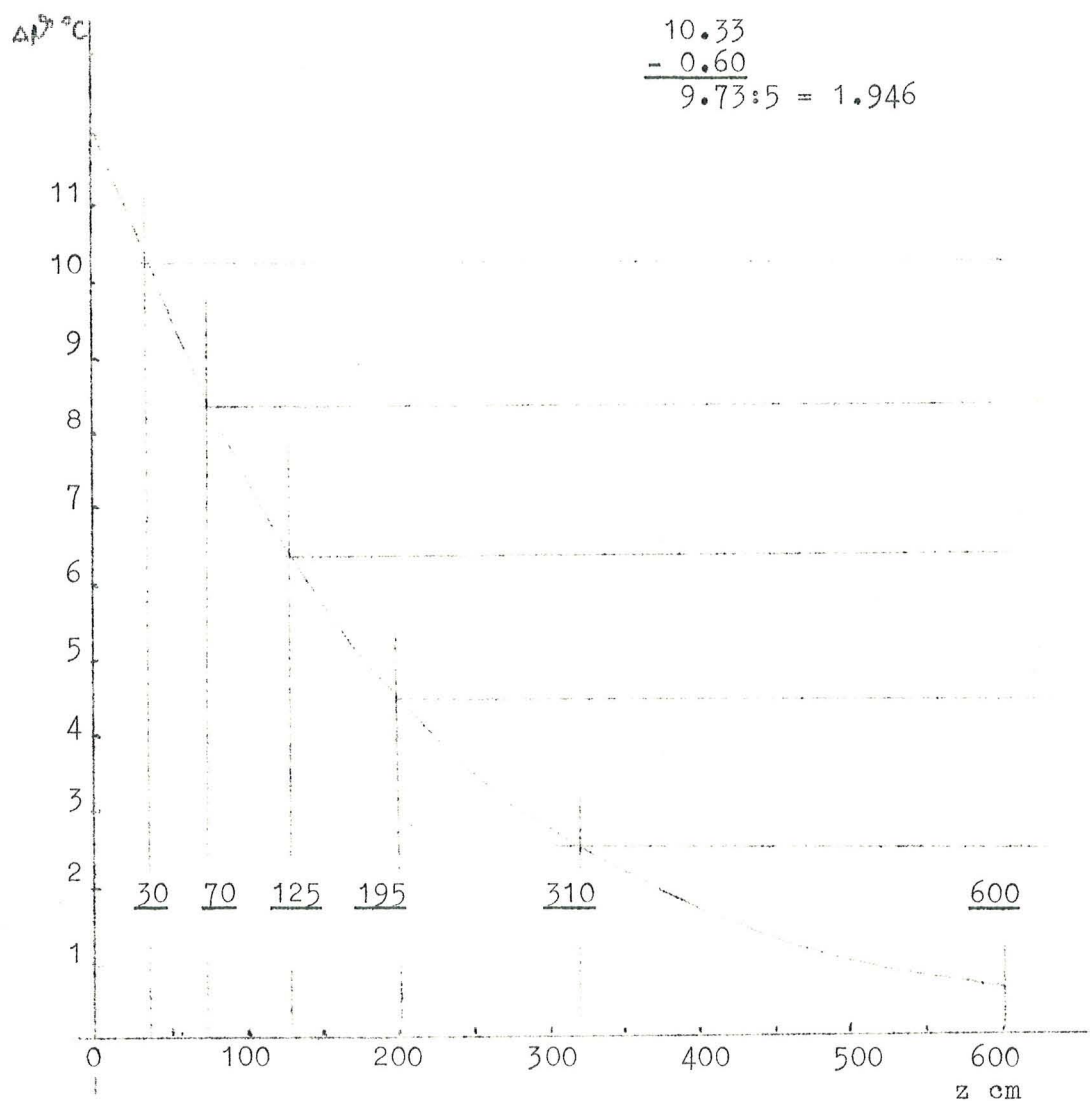


Fig. 4.2.

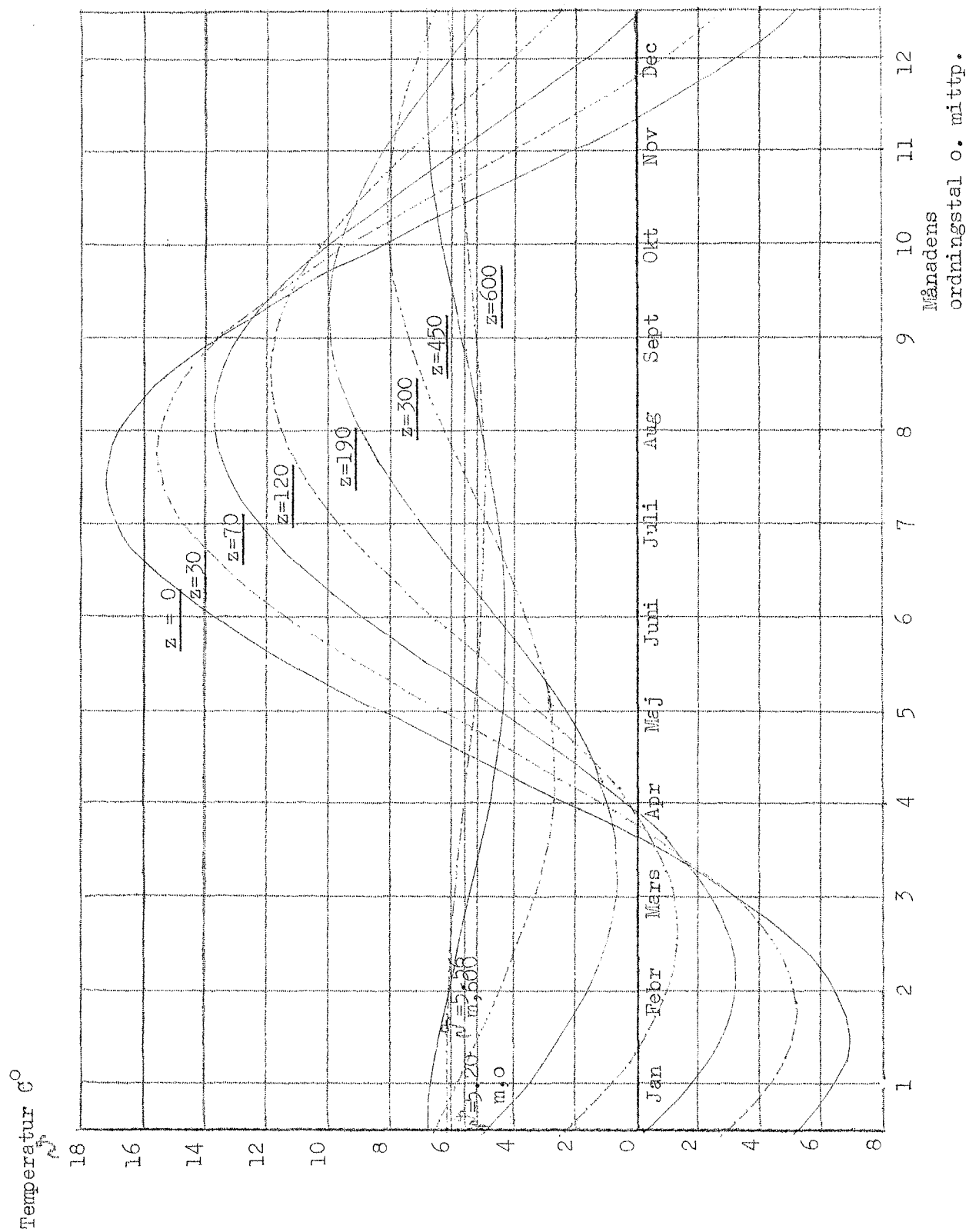


Fig. 4.1. Marktemperaturens variation med tiden (under året) på några olika djup.
Temperatur - tidkurvor s.k. geotermer. $\vartheta = f(z, t)$, z betraktad som parameter,

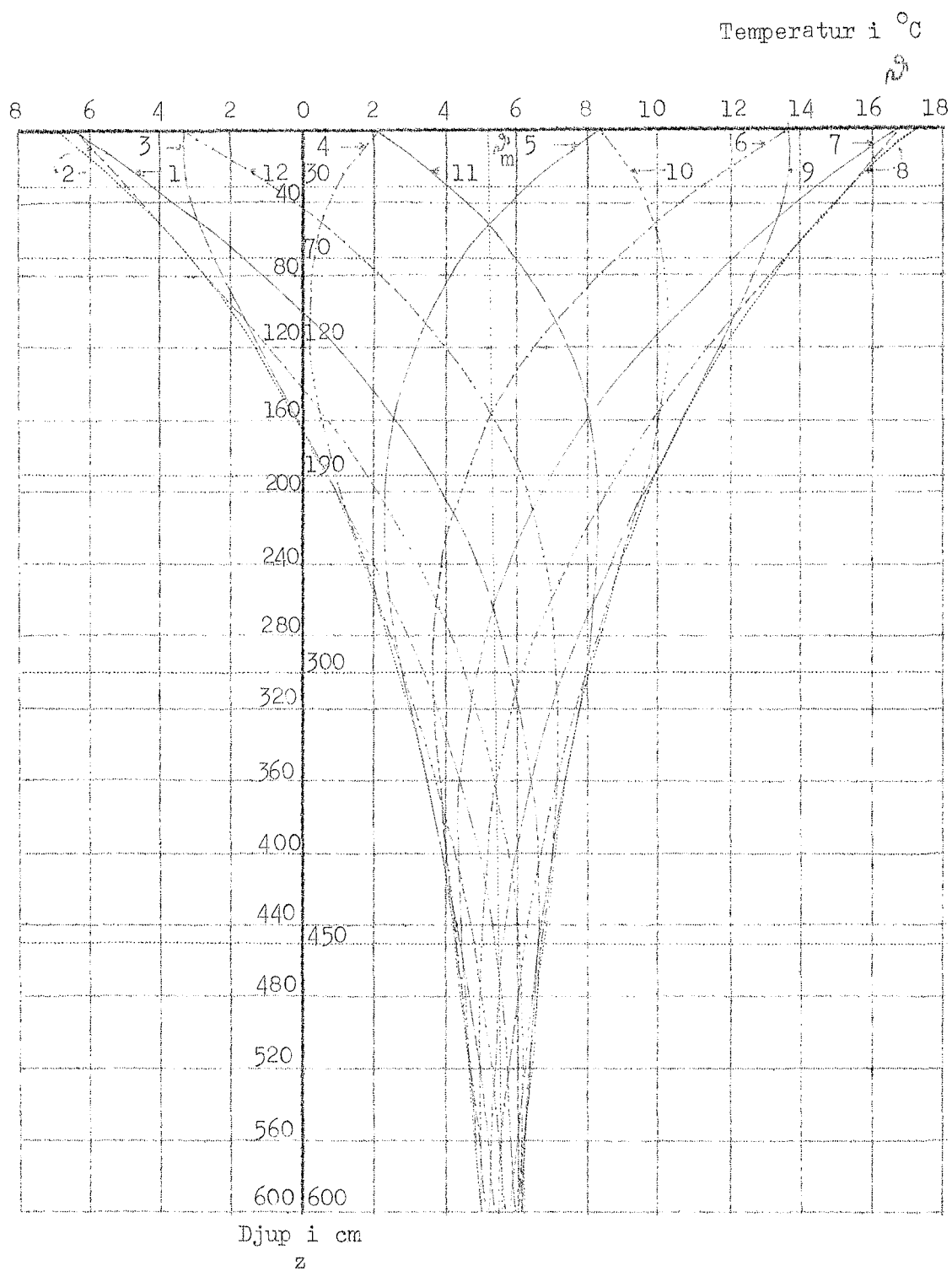


Fig. 4.2. Marktemperaturens variation med djupet vid några olika tidpunkter under året. Temperatur-djupkurvor s.k. tautokroner.

$\vartheta = f(z, t)$, t betraktad som parameter.

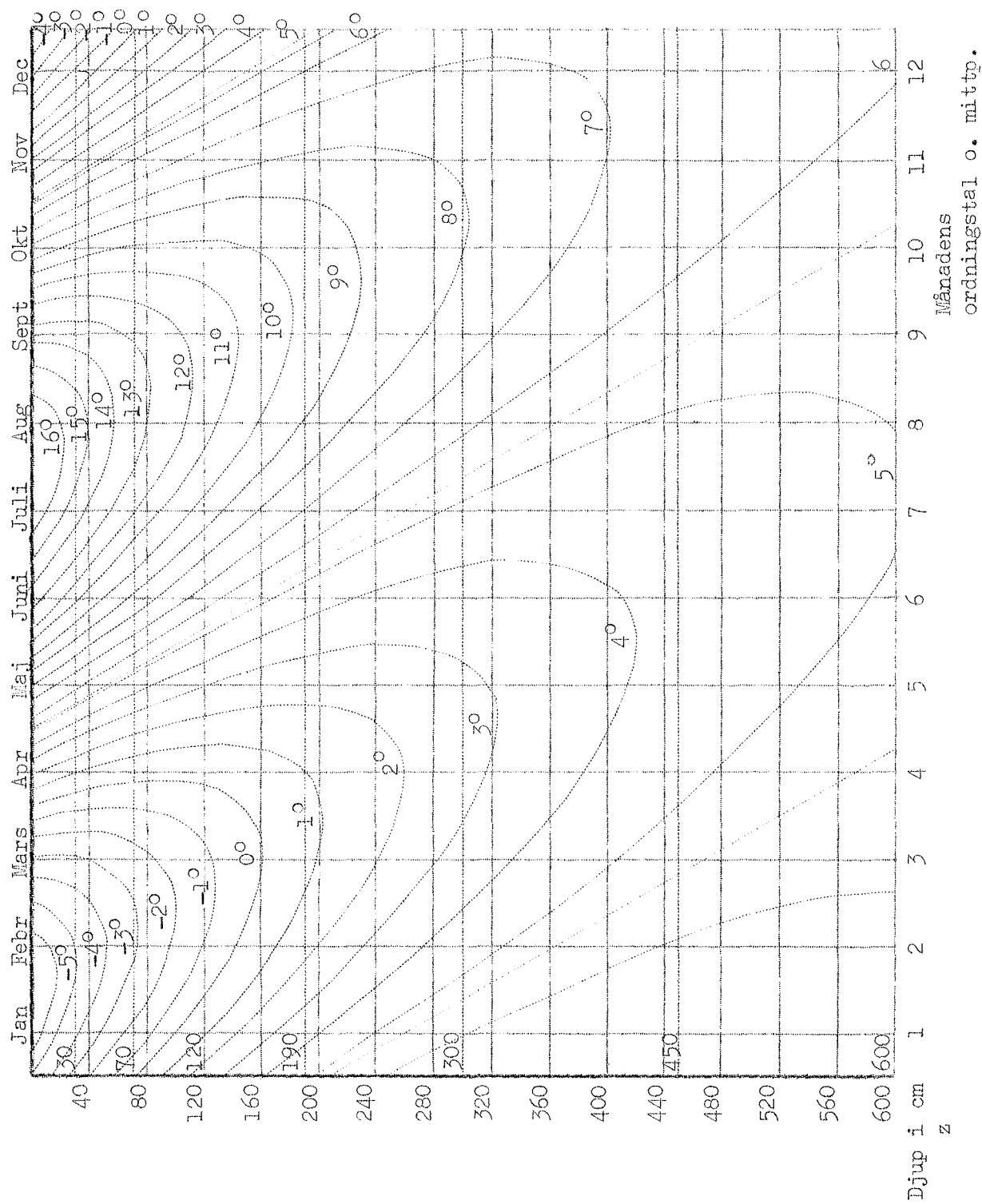


Fig. 4.3. Marktemperaturens variation med djupet och tiden under året.

Tid-djupkurvor s.k. termoisopleter. $\theta = f(z, t)$, θ betraktad som parameter.

5.

Ekvation (3.1) framställd med λ som parameter.

I ekvationen (3.1) förekommer uttrycket

$$\sqrt{\frac{\pi}{DT}} \quad (a)$$

på två ställen. Uttrycket kan också skrivas

$$\sqrt{\frac{\pi}{DT}} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi DT}} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (b)$$

Substitueras uttrycket (a) enl. (b), erhålles

$$\vartheta = \vartheta_{m,0} + c z + \Delta \vartheta_{a,0} e^{-2\pi \frac{z}{\lambda}} \cos 2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (5.2)$$

där dessutom tecknet för vinkeln ändrats enligt den kända relationen

$$\cos \alpha = \cos (-\alpha) \quad (c)$$

Ekvationen (5.2) är en synnerligen användbar form vid beräkningar och diagramkonstruktioner.

Om vi för enkelhetens skull sätta $c = 0$, vilket ju för alla $\frac{z}{\lambda} \approx 2$ m betyder ett fel i $\vartheta_{m,200} \approx 0.12^\circ$ C, och räknar ϑ från medelvärdet, förenklas ekv. (5.2) till

$$\vartheta = \Delta \vartheta_{a,0} e^{-2\pi \frac{z}{\lambda}} \cos 2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (5.3)$$

Med hjälp av detta uttryck kan tabellerna 5.1 och 5.2 beräknas

Tabell 5.1.

$\frac{z}{\lambda}$	$\frac{\Delta \vartheta_{a,z}}{\Delta \vartheta_{a,0}}$	$\frac{z}{\lambda}$	$\frac{\Delta \vartheta_{a,z}}{\Delta \vartheta_{a,0}}$
0.00	1.000	0.50	0.043
0.05	0.730	0.60	0.023
0.10	0.533	0.70	0.012
0.15	0.390	0.80	0.006
0.20	0.284	0.90	0.0035
0.30	0.152	1.00	0.00187
0.40	0.081	-	-

Av tabellen framgår, att amplituden på ett djup av omkring 0.75λ sjunkit till en procent av amplituden i ytan och att den på djupet $z = \lambda$ endast uppgår till c:a 0.2 % av amplituden i ytan.

Om vi uttrycker z i decimaler av λ dvs. $z = n\lambda$ och t i tolfte-
delar av perioden T , så kan vi lätt beräkna och uppställa tabell 5.2.

Tabell 5.2.

$\begin{matrix} n \\ t \end{matrix}$	0	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
0	1.000	0.694	0.431	0.088	-0.059	-0.065	-0.043	-0.019
$T/12$	0.866	0.714	0.531	0.212	0.032	-0.033	-0.037	-0.023
$2T/12$	0.500	0.541	0.487	0.278	0.105	0.009	-0.022	-0.021
$3T/12$	0.000	0.225	0.314	0.271	0.144	0.048	0.000	-0.014
$4T/12$	-0.500	-0.152	0.056	0.190	0.149	0.074	0.022	-0.002
$5T/12$	-0.866	-0.488	-0.217	0.059	0.113	0.081	0.037	0.009

Tabellen behöver ej ytterligare utbyggas, när för $t = \frac{6T}{12}$ vinkeln
blir $2\pi n - 2\pi \cdot \frac{6T}{12T} = 2\pi n - \pi$. För beräkning av \sqrt{z} -värden motsva-
rande intervallet $\pi - 2\pi$ kan då relationen

$$\cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$$

utnyttjas.

6.

Numerisk genomräkning av ett teoretiskt exempel
på en dygnsvåg.

Dygnsvågen beräknas i anslutning till de medelförhållanden, som preciseras av tautokronen för juni dvs. kurva nr 6 på fig. 4.2.

Vi antar, att dygnets medeltemperatur är $+13.7^{\circ}\text{C}$ (se nedan!) och att amplituden är 10°C . Tiden anges i timmar. Om $D = 0.004 \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}}$, så blir

$$D = 0.004 \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}} = 0.004 \cdot \frac{3600}{3600} \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}} = 14.4 \frac{\text{cm}^2}{\text{tim}}$$

Således

$$\lambda = 2\sqrt{\pi \cdot 14.4 \cdot 24} = 2 \cdot 1.7725 \cdot 3.7947 \cdot 4.8990 = 65.90 \text{ cm}$$

$$v = \frac{\lambda}{24} = \frac{65.90}{24} = 2.746 \frac{\text{cm}}{\text{tim}}$$

Dämpkonstanten blir

$$\sqrt{\frac{\pi}{DT}} = \frac{1.7725}{3.7947 \cdot 4.8990} = 0.09535 \text{ cm}^{-1} \approx 0.10 \text{ cm}^{-1}$$

För medeltemperaturens minskning med djupet inom intervallet 0-30 cm erhålles vid noggrann avläsning av tautokronen $z = 0$, $\bar{\rho} = 13.70$ samt $z = 30$, $\bar{\rho} = 11.30$.

$$\Delta \bar{\rho}_{m,z} = 13.7 - 0.08 z$$

Ekvationen (2.2) kan nu skrivas

$$\bar{\rho} = 13.7 - 0.08 \cdot z + 10 \cdot e^{-\frac{z}{10}} \cos \frac{2\pi}{24} \left[(t + t_0) - \frac{z}{2.75} \right] \quad (6.1)$$

Vi beräknar tabellerna 6.1. och 6.2. samt konstruerar kurvorna på fig. 6.1. och 6.2. Termoisopleterna har i detta fall icke blivit upprättade. Den intresserade läsaren kan själv som övning konstruera dem genom grafisk överföring av värden från fig. 6.1. till ett djup-tidsdiagram, vars tidsaxel överensstämmer med tidsaxeln i diagrammet på figur 6.1.

Tabell 6.1.

z cm	z/10	$e^{-\frac{z}{10}}$	$\alpha_{a,z}$ °C	Δt tim.	
0	0.00	1.000	10.00	0.000	
<u>2.7</u>	0.27	0.7634	7.63	0.983	
5	0.50	0.6065	6.07	1.821	
<u>6.5</u>	0.65	0.5221	5.22	2.367	
10	1.00	0.3679	3.68	3.642	
<u>12.5</u>	1.25	0.2865	2.87	4.553	
15	1.50	0.2231	2.23	5.463	
20	2.00	0.1353	1.35	7.284	
25	2.50	0.0821	0.82	9.105	
<u>30</u>	3.00	0.0498	0.50	10.93	

Vinkel α°	b = $\cos \alpha$	Pasförskjutning											
		Tim. 0		0.983		2.367		4.553		7.284		10.93	
		mm		14.7		35.5		68.3		10.9		164.0	
		0		2.7		6.5		12.5		20		30	
		10 b	+13.70	7.63 b	+13.48	5.22 b	+13.18	2.87 b	+12.70	1.35 b	+12.10	0.50 b	+11.30
0	1.0000	10.00	23.70	21.11	5.22	18.40	2.87	15.57	1.35	13.45	0.50	11.80	
180			3.70	5.85		7.96		9.83		10.75		10.80	
5	0.9962	9.96	23.66	21.08	5.20	18.38	2.86	15.56	1.34	13.44	0.50	11.80	
175			3.74	5.88		7.98		9.84		10.76		10.80	
10	0.9848	9.85	23.55	20.99	5.14	18.32	2.83	15.53	1.33	13.43	0.49	11.79	
170			3.85	5.97		8.04		9.87		10.77		10.81	
15	0.9659	9.66	23.36	20.85	5.04	18.22	2.77	15.47	1.30	13.40	0.48	11.78	
165			4.04	6.11		8.14		9.93		10.80		10.82	
20	0.9397	9.40	23.10	20.65	4.91	18.09	2.70	15.40	1.27	13.37	0.47	11.77	
160			4.30	6.31		8.27		10.00		10.83		10.83	
25	0.9063	9.06	22.76	20.40	4.73	17.91	2.60	15.30	1.22	13.32	0.45	11.75	
155			4.64	6.56		8.45		10.10		10.88		10.85	
30	0.8660	8.66	22.36	20.09	4.52	17.70	2.49	15.19	1.17	13.27	0.43	11.73	
150			5.04	6.87		8.66		10.21		10.93		10.87	
35	0.8192	8.19	21.89	19.73	4.28	17.46	2.35	15.05	1.11	13.21	0.41	11.71	
145			5.51	7.23		8.90		10.35		10.99		10.89	
40	0.7660	7.66	21.36	19.32	4.00	17.18	2.20	14.90	1.03	13.13	0.38	11.68	
140			6.04	7.64		9.18		10.50		11.07		10.92	
45	0.7071	7.07	20.77	18.88	3.69	16.87	2.03	14.73	0.95	13.05	0.35	11.65	
135			6.63	8.08		9.49		10.67		11.15		10.95	
50	0.6428	6.43	20.13	18.38	3.36	16.54	1.84	14.54	0.87	12.97	0.32	11.52	
130			7.27	8.58		9.82		10.86		11.23		10.98	
55	0.5736	5.74	19.44	17.86	2.99	16.17	1.65	14.35	0.77	12.87	0.29	11.59	
125			7.96	9.10		10.19		11.05		11.33		11.01	
60	0.5000	5.00	18.70	17.30	2.61	15.79	1.44	14.14	0.63	12.78	0.25	11.55	
120			8.70	9.66		10.57		11.26		11.42		11.05	
65	0.4226	4.23	17.93	16.70	2.21	15.39	1.21	13.91	0.57	12.67	0.21	11.51	
115			9.47	10.26		10.97		11.49		11.53		11.09	
70	0.3420	3.42	17.12	16.09	1.79	14.97	0.98	13.68	0.46	12.56	0.17	11.47	
110			10.28	10.87		11.39		11.72		11.64		11.13	
75	0.2588	2.59	16.29	15.45	1.35	14.53	0.74	13.44	0.35	12.45	0.13	11.43	
105			11.11	11.51		11.83		11.96		11.75		11.17	
80	0.1737	1.74	15.44	14.81	0.91	14.09	0.50	13.20	0.23	12.33	0.09	11.39	
100			11.96	12.15		12.27		12.20		11.87		11.21	
85	0.0872	0.87	14.57	14.15	0.46	13.64	0.25	12.95	0.12	12.22	0.04	11.34	
95			12.83	12.81		12.72		12.45		11.98		11.26	
90	0.0000	0.00	13.70	13.48	0.00	13.18	0.00	12.70	0.00	12.10	0.00	11.30	
90			13.70	13.48		13.18		12.70		12.10		11.30	

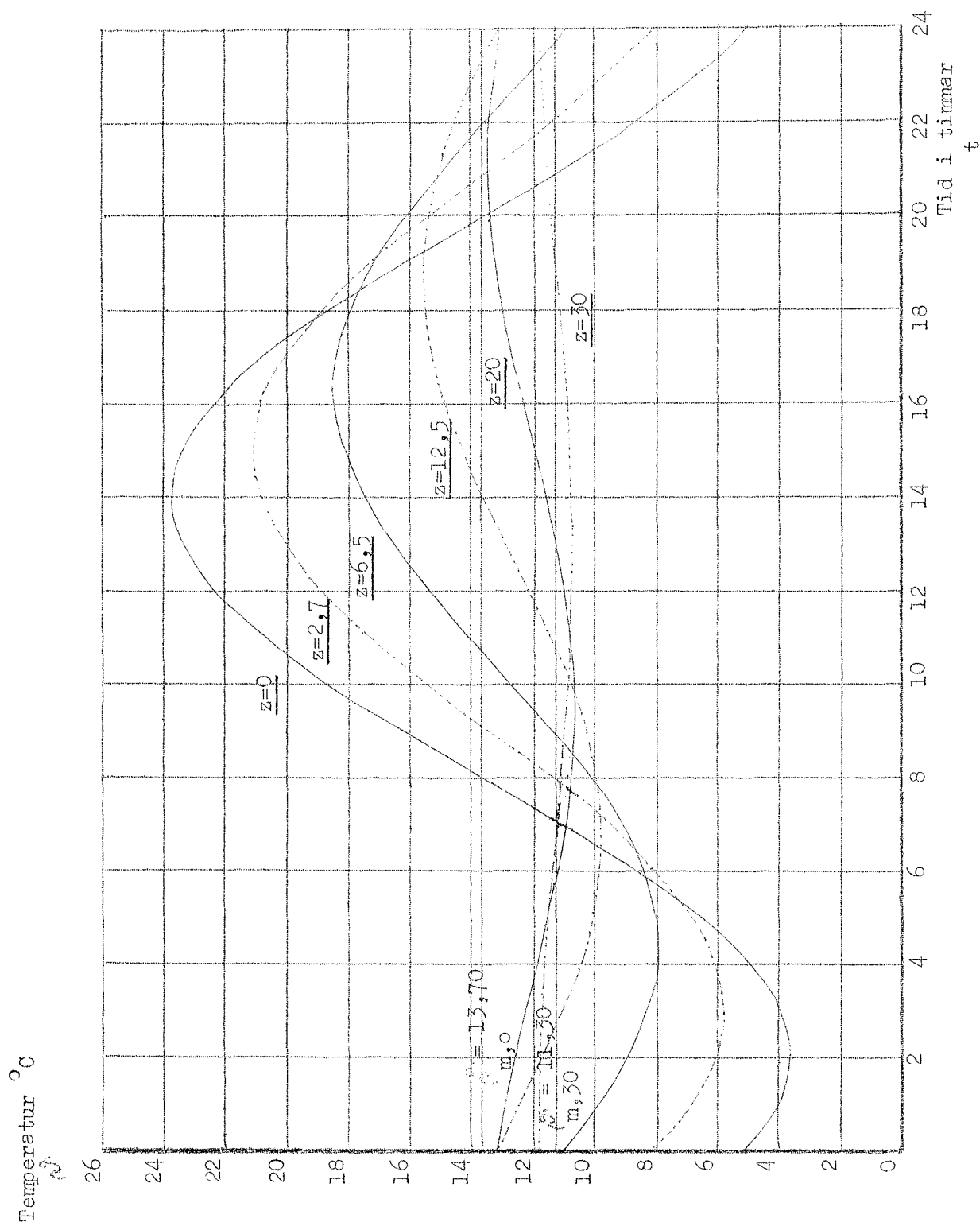


Fig. 6.1. Marktemperaturens variation med tiden (under dygnet) på några olika djup.
 Temperatur - tidkurvor s.k. geotermer. $\vartheta^z = f(z, t)$, z betraktad som parameter.

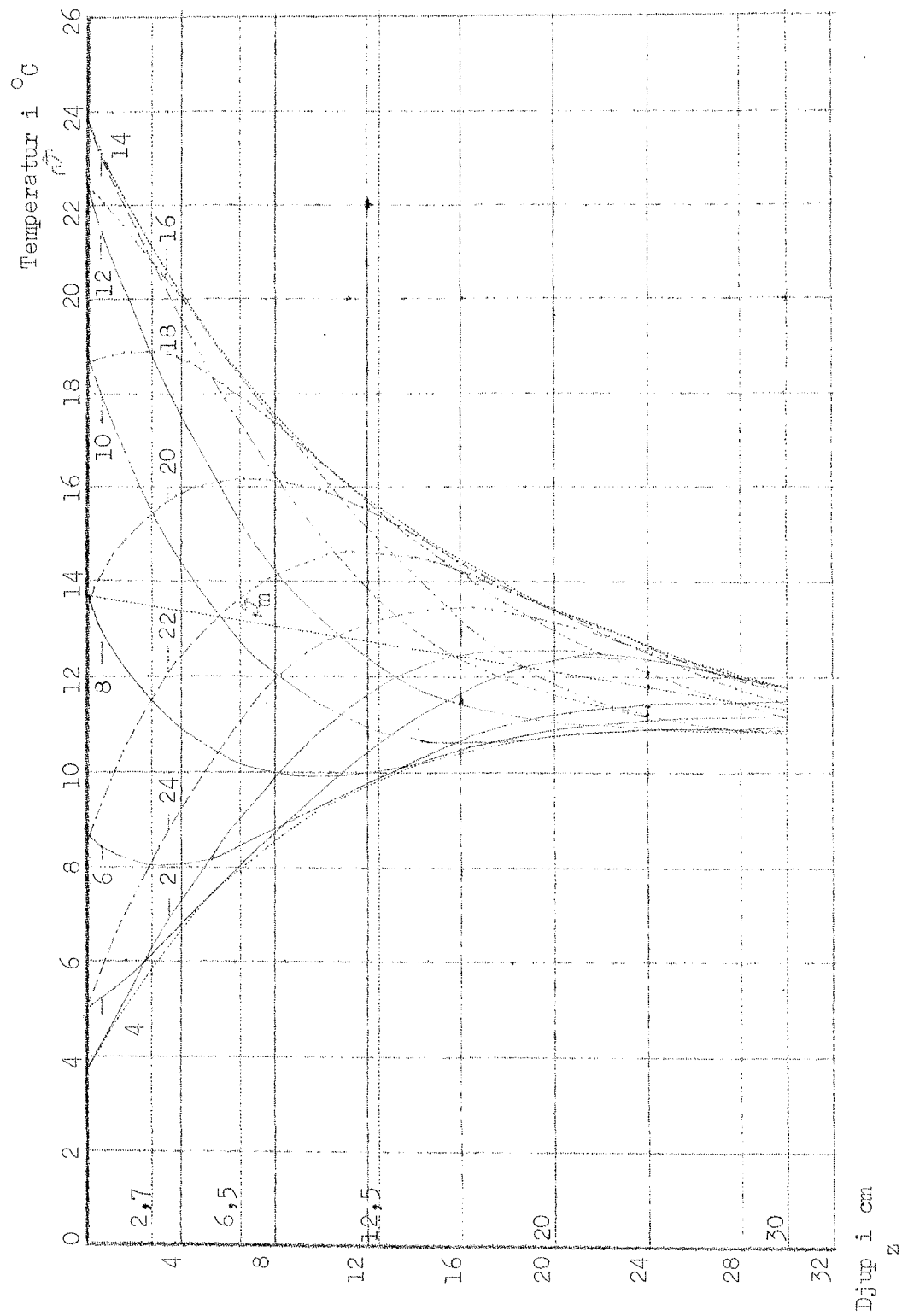


Fig. 6.2. Marktemperaturens variation med djupet vid några olika tidpunkter under dygnet. Temperatur-djupkurvor s.k. tautokroner. $\tau = f(z, t)$, t betraktad som parameter.

Ex. 6.1. Visa, att ekvationen för en termoisoplet kan skrivas

$$t = \frac{T}{\lambda} z - t_o + \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{\theta_i - \theta_{m,o} - c z}{\Delta \theta_{a,o} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z}} \quad (a)$$

där θ_i är den konstanta temperatur, som termoisopleten motsvarar.

Lösning: Under beaktande av begynnelsevillkoren, uttryckta i t_o , och med λ infört, kan ekvationen (3.1) skrivas

$$\theta = \theta_{m,o} + c z + \Delta \theta_{a,o} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z} \cos 2\pi \left(\frac{t + t_o}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \quad (b)$$

Termoisopleten definieras av att θ är konstant = θ_i . Genom insättning av detta värde och enkla omformningar erhålles

$$\frac{\theta_i - \theta_{m,o} - c z}{\Delta \theta_{a,o} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z}} = \cos 2\pi \left(\frac{t + t_o}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \quad (c)$$

eller om cosinusfunktionens invers införes

$$2\pi \left(\frac{t + t_o}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) = \arccos \frac{\theta_i - \theta_{m,o} - c z}{\Delta \theta_{a,o} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z}} \quad (d)$$

varav slutligen (obs. $v = \frac{\lambda}{T}$!)

$$t = \frac{z}{v} - t_o + \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{\theta_i - \theta_{m,o} - c z}{\Delta \theta_{a,o} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z}} \quad (e)$$

Ex. 6.2. Undersök, om någon av de s.k. termoisopleterna har formen av en rät linje.

Lösning: Enl. ex. 6.1. erhålles de olika termoisopleterna ur uttrycket

$$t = \frac{z}{v} - t_o + \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{\theta_i - \theta_{m,o} - c z}{\Delta \theta_{a,o} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z}} \quad (a)$$

för olika värden på $\theta_i = \text{konst.}$

Av uttrycket framgår, att t blir en linjär funktion av z , om det inträffar, att det trigonometriska uttrycket blir konst. för något värde

på \underline{a}_i . Detta är tydligen endast möjligt, om $\underline{a}_i = \underline{a}_{m,0}$ och $c z$ kan försummas.

Nämnaren

$$\Delta_{a,0}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z} \quad (b)$$

är tydligen $\neq 0$ och en funktion av djupet, men om $\underline{c z}$ försummas och $\underline{a}_i = \underline{a}_{m,0}$, så blir täljaren = 0 och

$$\arccos = \frac{2n+1}{2} \pi \quad (c)$$

\underline{t} är då en lineär funktion av \underline{z} eller

$$t = \frac{z}{v} + \left(\frac{2n+1}{4} - \frac{t_0}{T} \right) T \quad (d)$$

vilket är ekv. för en serie räta parallella linjer med vinkelkoefficienten = inverterade värdet av vågens hastighet och ordinatan i origo t_1

$$t_1 = \left(\frac{2n+1}{4} - \frac{t_0}{T} \right) T$$

Två konsekutiva parallella linjer ligger på avståndet

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2}$$

dvs. halva perioden.